Turbulence
Analyse statistique d'un champ turbulent

1 Description des données

Le champ de vitesse instantané, discrétisé sur une grille de taille 2048^3, est issu d'une simulation numérique tridimensionnelle des équations de Navier-Stokes destinée à reproduire une turbulence homogène isotrope. Le domaine de calcul est un cube de taille physique $2\pi \times 2\pi \times 2\pi$ m^3 et les conditions aux limites sont périodiques. La viscosité cinématique du fluide considéré est $\nu = 0.00035$ m^2.s^{-1}. On notera $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ le champ de vitesse.

Les donnes qui vous sont proposées sont les champs de vitesse $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ extraits d'une "tranches" du domaine. A titre d'exemple, le fichier de données intitulé `uy_slice_x.raw` contient la composante u_y dans le plan normal à $\boldsymbol{e}_x$ passant par le centre du domaine.

Les fichiers de données peuvent être lus et formatés par un script python `turb_field_1.py` ou un script Matlab `turb_field_1.m` fournis.

Vous obtenez, après lectures des données trois champs

$$u_x(y,z),\ u_y(y,z),\ \text{et}\ u_z(y,z)$$

NB : On vous propose une tranche du champ de vitesse et non pas tout le champ de vitesse simplement pour des questions de taille de fichier et de temps de traitement : selon vous quelle est la taille en Go du champ 3D complet ?

Q.1) Tracer une (jolie) image de ces trois composantes de la vitesse

2 Statistiques en un point

Q.2) Calculer la vitesse moyenne, $\boldsymbol{U} = \langle \boldsymbol{u} \rangle$.

Q.3) Calculer l'énergie cinétique turbulente moyenne dans la tranche choisie $k = \frac{1}{2}\langle u_i' u_i' \rangle$ et en déduire la vitesse caractéristique des fluctuations turbulentes que l'on notera u.

Q.4) Tracez sur une même figure les fonctions de densité de probabilité de u_x, u_y et u_z et comparez-les à une loi normale.

Q.5) Calculer pour chacune des composantes sa variance ($\sigma^2 = \langle u_i'^2 \rangle$), son coefficient d'asymétrie ou skewness ($S = \langle u_i'^3 \rangle / \langle u_i'^2 \rangle^{3/2}$) ainsi que son coefficient d'aplatissement ou Flatness ($F = \langle u_i'^4 \rangle / \langle u_i'^2 \rangle^2$).

Q.6) Calculer les champs des gradients de vitesse $\partial u_x/\partial y$, $\partial u_y/\partial y$, $\partial u_z/\partial y$, $\partial u_x/\partial z$, $\partial u_y/\partial z$, $\partial u_z/\partial z$ (**pour calculer les dérivées, faites bien attention à la manière dont sont ordonnées les données**)

Q.7) Tracer leur fonction de densité de probabilité et déterminer pour chacun la variance, la skewness ainsi que le Kurtosis.

3 Fonctions de corrélation en deux points

On rappelle la définition de la fonction de corrélation longitudinale

$$f(r) = \frac{\langle u_{/\!/}(\boldsymbol{x}) u_{/\!/}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}) \rangle}{u^2}$$

avec $u_{/\!/} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{r}/\|r\|$ la projection de $\boldsymbol{u}$ sur la direction $\boldsymbol{r}$.

Q.8) Calculer et tracer sur un même graphique les fonctions de corrélation longitudinales $f_1(r)$, $f_2(r)$ obtenues en prenant respectivement $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_y$ et $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_z$.

Q.9) Au regard des résultats obtenus, on pourra discuter l'isotropie de l'écoulement.

Pour la suite on choisira de définir, pour $r \in [0..\pi]$, la fonction de corrélation longitudinale $f(r)$ par :

$$f(r) = 1/2(f_1(r) + f_2(r))$$

Q.10) En déduire les valeurs de
- l'échelle intégrale longitudinale, L_f
- la micro-échelle de Taylor longitudinale, λ_f

Comment se compare l'échelle intégrale par rapport à la taille du domaine.

Q.11) Donner la valeur du nombre de Reynolds $Re = uL_f/\nu$ et du nombre de Reynolds de Taylor $Re_\lambda = u\lambda_f/\nu$ associés à cet écoulement turbulent.

Q.12) Estimer l'ordre de grandeur du taux de dissipation moyen à partir de l'amplitude des fluctuations, u et de l'échelle intégrale L_f.

Q.13) Donner la valeur du taux de dissipation obtenue à partir de la formule $\varepsilon = 30\nu u^2/\lambda_f^2$.

Q.14) En déduire une estimation de l'échelle de Kolmogorov, η.
Q.15) Que pensez-vous du rapport entre L_f et η ?

On définie également la fonction de corrélation transversale

$$g(r) = \frac{\langle u_\perp(\boldsymbol{x})u_\perp(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})\rangle}{u^2}$$

avec $u_\perp^2 = \boldsymbol{u}^2 - u_{/\!/}^2$ une composante du vecteur vitesse perpendiculaire au vecteur de séparation $\boldsymbol{r}$.

Q.16) Calculer et tracer $g(r)$
Q.17) Comparer ce tracé avec l'estimation de $g(r)$ que vous pouvez faire à partir de $f(r)$ en supposant l'écoulement isotrope et incompressible. Que pouvez-vous en conclure ?

4 statistiques des incréments de vitesse

On s'intéresse maintenant aux statistiques des incréments de vitesse :

$$\delta_r u = u_{/\!/}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}) - u_{/\!/}(\boldsymbol{x}).$$

On appelle la fonction de structure d'ordre n, le moment d'ordre n des incréments de vitesse :

$$S_n(r) = \langle(\delta_r u)^n\rangle$$

Q.18) Quelle est la relation entre la fonction de structure d'ordre 2, S_2, et la fonction de corrélation longitudinale f ?

Q.19) Tracer l'évolution de la fonction de structure d'ordre 1,2,3 et 4 en fonction de r. Avec des échelles logarithmiques, vous devriez pouvoir distinguer différentes zones. Rappelez le nom de et les limites de ces régions.

Q.20) Comparer, et commenter, l'évolution des fonctions de structure avec l'estimation basée sur la première version de la théorie de Kolmogorov (K41) qui suppose que $\delta_r u \sim (\langle\varepsilon\rangle r)^{1/3}$. Rappelez les hypothèses et le domaine de validité de la théorie K41.

Q.21) Tracer également la skewness et le kurtosis des incréments de vitesse, $S_3/S_2^{3/2}$ et S_4/S_2^2 respectivement. Comparer également l'évolution de ces quantités avec r avec la prédiction venant de K41. Proposer une interprétation de l'évolution de ces deux grandeurs avec r.

Q.22) Pour quelques valeurs de r (typiquement $r/\Delta x = 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100, 500, 1000$) tracez la PDF des incréments de vitesse et comparez-la à la distribution gaussienne. NB : pour comparer les différentes PDF il peut être intéressant de normaliser la PDF, quelle grandeur choisir ? Commenter.

5 Statistique de la dissipation

On s'intéresse maintenant aux statistiques du taux de dissipation local ε.

Q.23) Rappeler la définition du taux de dissipation, pouvez-vous calculer le taux de dissipation local à partir des coupes du champ de vitesse fournies ?

Q.24) On vous donne 3 coupes du champ de dissipation local : `dissip_slice_x.raw` , `dissip_slice_y.raw` et `dissip_slice_z.raw`. A partir de ces données, calculez la moyenne et la variance de la dissipation.

Q.25) Calculer également la densité de probabilité du taux de dissipation et comparer la avec la distribution gaussienne et la distribution lognormale.

Q.26) Calculer et tracer la densité de probabilité du logarithme de ε. Si le taux de dissipation suit une distribution log-normale quelle sera la distribution de $\ln \varepsilon$?

Q.27) Calculer la corrélation spatiale de la corrélation, ou de son log. Et tracer son évolution en fonction de r et commentez l'évolution de la corrélation.

6 Test de Kolmogorov 62

On cherche maintenant à tester la théorie raffinée de Kolmogorov 62 (K62).
Cette théorie propose une moyenne locale du taux de dissipation à une échelle r $\langle\varepsilon\rangle_r$.
Q.28) Proposer une façon de calculer $\langle\varepsilon\rangle_r$.
Q.29) Quelles quantités devrait-on tracer pour tester le modèle K62 ?